

ผลการเรียนรู้

เข้าใจความหมาย การคูณระหว่างเมทริกซ์

สาระสำคัญ

บทนิยาม 7 การคูณเมทริกซ์

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$

ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด $m \times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, q\}$

ทฤษฎีบทที่ใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้มีดังต่อไปนี้

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ จะได้ว่า

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
3. $A(B + D) = AB + AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
4. $(A + E)B = AB + EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนอธิบายสมบัติที่เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ได้
2. นักเรียนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ได้

สาระการเรียนรู้

การคูณระหว่างเมทริกซ์

สมบัติของเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการคูณที่ใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ มีดังต่อไปนี้

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ จะได้ว่า

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
3. $A(B + D) = AB + AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
4. $(A + E)B = AB + EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

จากข้อ 1 ทำให้สามารถแทน $A(BC)$ และ $(AB)C$ ด้วย ABC โดยไม่เกิดความสับสน

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนการคูณเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

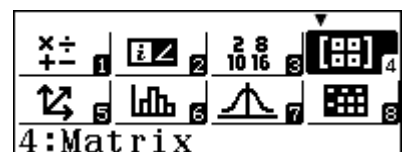
ตัวอย่างที่ 1 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ไม่ใช่เครื่องคำนวณ)

วิธีทำ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1 + 2 \times 5) & (3 \times 3 + 2 \times 2) \\ (1 \times 1 + 3 \times 5) & (1 \times 3 + 3 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$

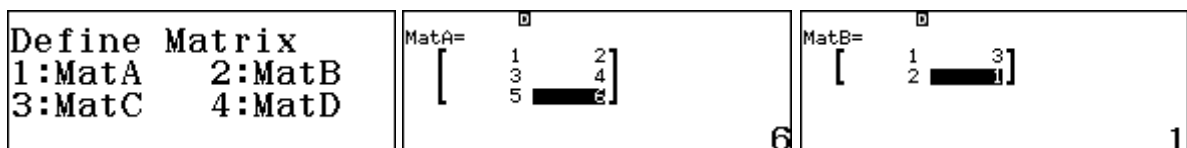
ตัวอย่างที่ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ Casio รุ่น fx-991EX Classwiz)

วิธีทำ

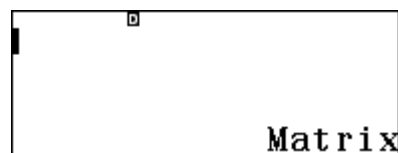
- 1) กด **MENU** **4** เพื่อเลือกเมนู 4 Matrix



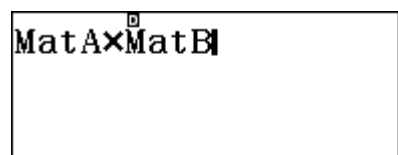
- 2) จากนั้นนิยามเมทริกซ์ A และ B



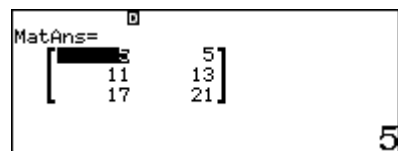
3) เมื่อนิยามเมทริกซ์ A และ B เสร็จแล้วให้กด **AC**



4) จากนั้นหาค่าของ AB โดยกด **OPTN** **3**



✖ **OPTN** **4** **=** ตามลำดับ



- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติที่เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์
- ครูให้นักเรียนจับคู่ที่นั่งด้วยกัน เพื่อทำใบกิจกรรมที่ 3 โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ Casio รุ่น fx-991EX Classwiz ในการสำรวจคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อโดยทำทีละข้อ (ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์)
- จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ $AB = BA$ หรือไม่ ซึ่งเมื่อทำกิจกรรมในข้อนี้เสร็จนักเรียนจะได้ข้อสรุปว่า $AB \neq BA$ (ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) ซึ่งครูอาจจะเพิ่มเติมในบางกรณีที่ $AB = BA$ เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นต้น}$$

- จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 2 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว $(AB)C = A(BC)$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
- เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 2 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(AB)C = A(BC)$ (ขั้นการสรุป)
- จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 3 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
- เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 3 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ (ขั้นการสรุป)
- จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 4 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว $A(B + C) = AB + AC$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)

10.เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 4 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $A(B + C) = AB + AC$ (ขั้นการสรุป)

11.จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 5 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{n \times p}$ แล้ว $(A + B)C = AC + BC$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)

12.เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 5 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(A + B)C = AC + BC$ (ขั้นการสรุป)

13.ให้นักเรียนตรวจสอบว่า เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว

$(A + B)C = CA + CB$ หรือไม่ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ Casio รุ่น fx-991EX Classwiz (ขั้นการตรวจสอบโน้ตค้นที่คลาดเคลื่อน) ซึ่งการตรวจสอบแสดงได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ A, B และ C

MatA= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 2	MatB= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ 6	MatC= $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2
---	--	--

- คำนวณค่าของ $(A + B)C$

(MatA+MatB)MatC	MatAns= $\begin{bmatrix} 21 & 16 \\ 56 & 34 \end{bmatrix}$ 21
-----------------	---

- คำนวณค่าของ $CA + CB$

MatCMatA+MatCMatB	MatAns= $\begin{bmatrix} 30 & 64 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}$ 34
-------------------	---

- จึงสรุปได้ว่า $(A + B)C \neq CA + CB$

14.ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่องการคูณเมทริกซ์ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ขั้นการฝึกทักษะ)

15.ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสมบัติการคูณของเมทริกซ์

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่องการคูณเมทริกซ์
3. แบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่องการคูณเมทริกซ์

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 3
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 3
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 3

เรื่อง การคูณเมทริกซ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้และตอบคำถามท้ายใบกิจกรรม

1) ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

1.1 $AB =$

1.2 $BA =$

1.3 AB เท่ากับ BA หรือไม่.....

จากข้อ 1.1 – 1.3 เมทริกซ์มีสมบัติสลับที่สำหรับการคูณหรือไม่

.....

2) จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

2.1 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$A(BC) =$

$(AB)C =$

2.2 $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$D(EF) =$

$(DE)F =$

2.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$

$A(BC) =$

$(AB)C =$

จากข้อ 2.1-2.3 พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}, C = [c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว $A(BC) =$

3) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 11 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.1 $(2A)B =$

3.2 $A(2B) =$

3.3 $2(AB) =$

3.4 $(5A)C =$

3.5 $A(5C) =$

3.6 $5(AC) =$

3.7 $(4C)D =$

3.8 $C(4D) =$

3.9 $4(CD) =$

จากข้อ 3.1 – 3.9 พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $(cA)B = \dots\dots\dots$

4) จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

4.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$A(B + C) =$

$AB + AC =$

4.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A(B + C) =$

$AB + AC =$

4.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$

$A(B + C) =$

$AB + AC =$

จากข้อ 4.1-4.3 พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$

แล้ว $A(B+C) = \dots\dots\dots$

5) จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

5.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$(A+B)C =$ $AC+BC =$

5.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$(A+B)C =$ $AC+BC =$

5.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$

$(A+B)C =$ $AC+BC =$

จากข้อ 5.1-5.3 พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$

แล้ว $(A+B)C = \dots\dots\dots$

แบบฝึกทักษะที่ 3
เรื่อง การคูณเมทริกซ์

คำชี้แจง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$
ให้นักเรียนหาค่าต่อไปนี้

1) $(AB)C =$

2) $A(BC) =$

3) $(2A)(5C) =$

4) $(2A)(\frac{3}{2}C) - 3AC =$

5) $AB + AC =$

6) $AB - AC =$

7) $AD + BD =$